Capítulo 3

SUBESPAÇOS VECTORIAIS DE R^n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

Definição:
Um vector w de $\mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ se w pode ser expresso na forma

$$w = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

onde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e são denominados coeficientes da combinação linear.

Rectas e planos

- Equação vectorial duma recta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(v_1, v_2, v_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ou

$$\boxed{(x, y, z) = \lambda(v_1, v_2, v_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

- Equação vectorial dum plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda_1(v_1, v_2, v_3) + \lambda_2(u_1, u_2, u_3), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

ou

$$\boxed{(x, y, z) = \lambda_1(v_1, v_2, v_3) + \lambda_2(u_1, u_2, u_3), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},}$$

$v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ são dois vectores que não têm a mesma direcção = não são múltiplos um do outro

= um não é combinação linear do outro

Exemplos:

- A equação $(x_1, x_2) = \lambda(3,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, define a equação vectorial da recta de $\mathbb{R}^2$ que passa pela origem e tem vector director $(3,1)$.

- $(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(2,0,1) + \lambda_2(-2,0,-1)$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

não define um plano em $\mathbb{R}^3$ pois os vectores

$$(2,0,1) \text{ e } (-2,0,-1)$$

têm a mesma direção = são combinação linear um do outro

Generalização a R^n

- Equação vectorial duma recta de $\mathbb{R}^n$ que passa na origem:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq (0,0,\ldots,0)$. → $\boxed{x = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$

- Equação vectorial dum plano de $\mathbb{R}^n$ que passa na origem:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

u, v são vectores que não são combinação linear um do outro.

$$\boxed{x = \lambda_1 v + \lambda_2 u, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$$

Propriedades dos planos e rectas:

Seja *W* o plano $\quad x = \lambda_1 v + \lambda_2 u, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

1. $\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 v + \alpha_2 u \\ x_2 = \beta_1 v + \beta_2 u \end{array}$ são pontos do plano *W* então,

$x_1 + x_2 = \alpha_1 v + \alpha_2 u + \beta_1 v + \beta_2 u = (\alpha_1 + \beta_1)v + (\alpha_2 + \beta_2)u$,
é um ponto do plano *W*.

2. Se k é um escalar qualquer, então

$$kx_1 = k(\alpha_1 v + \alpha_2 u) = (k\alpha_1)v + (k\alpha_2)u$$ pertence a *W*.

Definição:

Um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, W, diz-se **subespaço vectorial** de $\mathbb{R}^n$, se:

1. $\forall x_1, x_2 \in W, \quad x_1 + x_2 \in W.$
2. $\forall k \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in W, \quad kx_1 \in W.$

Exemplos:

1. As rectas e os planos de $\mathbb{R}^n$ que passam pela origem.
2. $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, a que chamamos subespaço nulo.
3. $\mathbb{R}^n$.
4. $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x, y \geq 0\}$ ✗

Proposição:

Se W é subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $0_{\mathbb{R}^n} \in W$.

Dem:

Obs: $0_{\mathbb{R}^n} \notin W \implies W$ não pode ser subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Proposição:

O conjunto solução de um sistemas de equações lineares homogéneo com n incógnitas,

$$AX=0,$$

é um subespaço de de $\mathbb{R}^n$.

Dem:

Subespaço Gerado

Dados os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$ em $\mathbb{R}^n$, pode construir-se um subespaço de $\mathbb{R}^n$:

Proposição:
O conjunto *W* das combinações lineares dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$,

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_n v_s, \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

"Subespaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_s$"

$W = \langle v_1, v_2, \ldots, v_s \rangle$

Exemplo: $\mathbb{R}^3$

- $\langle (1,2,3) \rangle = \{(x,y,z) = \lambda(1,2,3), \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $\langle (1,2,3),(1,0,2) \rangle = \{(x,y,z) = \lambda(1,2,3) + \beta(1,0,2) \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$
- $\langle (0,0,0) \rangle = \langle 0_{\mathbb{R}^3} \rangle = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- $\langle \underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)} \rangle = ?$

"Vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ "

Dependência e independência linear

Dada a equação vectorial em $\mathbb{R}^n$

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{tem-se:}$$

1. Um plano se os vectores não são combinação linear um do outro
2. Uma recta se um deles é combinação linear do outro e um é não núlo
3. O ponto (0,0,...,0)= $0_{\mathbb{R}^n}$, se os vectores forem ambos nulos.

Obs:
As propriedades geométricas dependem da "relação linear" entre os vectores

Definição:

Dizemos que um conjunto, não vazio, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ é **linearmente independente** se os únicos escalares que satisfazem a equação

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p = 0$$

são $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$.

Se existem escalares não nulos que satisfazem a equação então o conjunto diz-se **linearmente dependente**.

Exercício1:

Em $\mathbb{R}^3$ averigue se os vectores (1,0,1), (0,1,1) e (1,1,1) são linearmente independentes.

Obs: Para averiguar se em $\mathbb{R}^n$ os vectores $v_1, \ldots, v_p$ são linearmente independentes considera-se a equação

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p = 0$$

e procuram-se as suas soluções, ou seja, matricialmente consideram-se as matrizes

$$A = [\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_p \,] \qquad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

e resolve-se o sistema homogéneo AX=0.

1. $v_1, \ldots, v_p$ linearmente independentes, se o sistema homogéneo é possível determinado (logo só temos a solução nula)
2. $v_1, \ldots, v_p$ linearmente dependentes, se o sistema homogéneo é possível indeterminado.

Proposição:

Um conjunto S de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contenha o vector nulo é linearmente dependente.

Dem:

Proposição:

Um conjunto S com dois ou mais elementos é linermente independente se e só se um deles se escreve como combinação linear dos outros.

Proposição:

Um conjunto com m vectores de $\mathbb{R}^n$ em que $m > n$, é linearmente dependente.

Exemplos: Os conjuntos são linear/ independentes em $\mathbb{R}^3$?

- $S = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\}$
- $T = \{(1,0,1),(0,0,0),(1,1,1)\}$
- $P = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
- $F = \{(1,1,0),(3,1,2),(0,2,1),(1,1,1)\}$

Exercício2: Confirme, recorrendo à resolução de um sistema de equações lineares homogéneo, AX=0, que os conjuntos S, T e F são linearmente dependentes.

Variedade linear

$\mathbb{R}^n$

- A equação vectorial de uma recta que passa na origem é

$$x = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$v \neq 0$.

Subespaço gerado por v = < v >

- A equação vectorial de uma recta paralela que passa no ponto x_0 é

$$x = x_0 + \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Variedade linear

Definição:
Uma variedade linear é qualquer conjunto de pontos da forma

$$x = x_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

ou

$$\boxed{x = x_0 + \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle}$$

"Translação de um subespaço por um ponto"

Proposição:
O conjunto solução W de um sistemas de equações lineares homogéneo com n incógnitas,

$$AX=0,$$

é um subespaço de de $\mathbb{R}^n$.

Proposição: O conjunto solução de um sistema possível

$$AX=B$$

é uma variedade linear da forma

$$x = x_0 + W \, ,$$

onde x_0 é solução particular e W é o conjunto solução de AX=0.